# CLEAI, matematica generale, primo semestre 2003-2004
# Soluzioni degli esercizi della prova scritta dell'11 febbraio 2004

**Studio di funzione:**
Disegnare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{x}e^{x^2} & \text{se} \quad x \geq 1 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$$

Evidenziare in particolare i seguenti punti: (a) campo d'esistenza e suoi punti di accumulazione; (b) punti in cui $f$ è sicuramente continua, punti in cui $f$ è sicuramente derivabile; (c) punti di discontinuità; (d) limiti; (e) asintoti; (f) monotonia; (g) tangenti destra e sinistra in $x = 1$; (h) punti di non derivabilità.

**Svolgimento:**
Chiamiamo per comodità $f_1(x) = \sqrt{x}e^{x^2}$ e $f_2(x) = x^2+2x+1$. Osserviamo che conosciamo il grafico di $f_2$, dunque l'esercizio si riduce allo studio di $f_1$ nell'intervallo $[1, +\infty)$.

(a) $f_1$ contiene $\sqrt{x}$, che è definita per $x \geq 0$. Questo non comporta però alcuna restrizione al campo d'esistenza, in quanto $f_1$ va considerata nell'intervallo $[1, +\infty)$. Dunque CE $= (-\infty, +\infty)$, e CE$' = [-\infty, +\infty]$.

(b) Poiché $f_1$ e $f_2$ sono funzioni continue nei loro campi di esistenza, $f$ è sicuramente continua in C $= (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ (cioè l'unico punto in cui *forse* $f$ non è continua è 1). Stesso argomento per la derivabilità ($\sqrt{x}$ non è derivabile in 0, ma $f_1$ va considerata solo nell'intervallo $[1, +\infty)$), dunque $f$ è sicuramente derivabile in D $= (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

(c) Eventuali discontinuità vanno studiate in CE $-$ C $= \{1\}$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f_2(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 + 2x + 1 = 4$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f_1(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x}e^{x^2} = e$$

Poiché i limiti destro e sinistro di $f$ non coincidono, $f$ non è continua in 1.

(d) Gli unici limiti non banali sono quelli in CE$'$ $-$ C $= \{-\infty, 1, +\infty\}$. Il limite in 1 è già stato svolto, mentre quello in $-\infty$ è noto.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f_1(x) = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}e^{x^2} = +\infty$$

(e) Visti i limiti calcolati al punto precedente, deduciamo che:

- non ci sono asintoti verticali;
- non ci sono asintoti orizzontali;
- non ci sono asintoti obliqui verso $-\infty$ (le parabole non hanno asintoto obliquo verso $-\infty$).

Resta da verificare l'esistenza di un asintoto obliquo verso $+\infty$:

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}e^{x^2}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x^2}}{e^x}\frac{e^x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{x^2-x}\frac{e^x}{\sqrt{x}} = e^{+\infty}(+\infty) = +\infty$$

dunque non c'è asintoto obliquo verso $+\infty$.

(f) La monotonia è data dal segno della derivata prima.

$$f'(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{x^2} + 2x\sqrt{x}e^{x^2} & \text{se} \quad x > 1 \\ 2x + 2 & \text{se} \quad x < 1 \end{cases} = \begin{cases} e^{x^2}(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x\sqrt{x}) & \text{se} \quad x > 1 \\ 2x + 2 & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$$

Esaminiamo $f_1' = e^{x^2}(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x\sqrt{x})$. Il primo fattore ($e^{x^2}$) sempre positivo, mentre il secondo fattore... pure! Infatti esso è somma di due addendi ($\frac{1}{2\sqrt{x}}$ e $2x\sqrt{x}$) che sono sicuramente positivi *nell'intervallo* $(1, +\infty)$!!!

Il secondo pezzo è la derivata di una parabola con concavità verso l'alto: risolvendo $f_2' = 0$ troviamo il vertice $(-1, 0)$ della parabola.

Riassumendo, $f$ decresce in $(-\infty, -1)$, cresce in $(-1, 1)$ (e fin qua è la parabola), poi cresce ancora in $(1, +\infty)$.

(g) I coefficienti angolari delle tangenti destra e sinistra in 1 sono dati rispettivamente dai limiti destro e sinistro di $f'$ in 1:

$$m^- = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x+2 = 4$$
$$m^+ = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} e^{x^2}(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x\sqrt{x}) = \frac{5}{2}e$$

La tangente sinistra passa per il punto $(1, \lim_{x\to 1^-} f(x)) = (1,4)$, la tangente destra passa per il punto $(1, \lim_{x\to 1^+} f(x)) = (1,e)$ (vedi punto c). Otteniamo:

$$\text{tangente sinistra: } y-4 = m^-(x-1) = 4(x-1);$$
$$\text{tangente destra: } y-4 = m^+(x-1) = \frac{5}{2}e(x-1).$$

(h) Eventuali punti di non derivabilità vanno cercati in $\text{CE} - \text{D} = \{1\}$. $f$ non è derivabile in 1: infatti derivabile in $x_0 \Rightarrow$ continua in $x_0$, mentre $f$ non è continua in 1 (vedi punto c),

Collazionando tutte le suddette informazioni, si ottiene il grafico di $f$ (figura 1). Notare che il grafico è ottenuto per incollamento dei grafici di $f_1$ e $f_2$, e abbiamo sfruttato dove possibile la conoscenza del grafico di $f_2$.

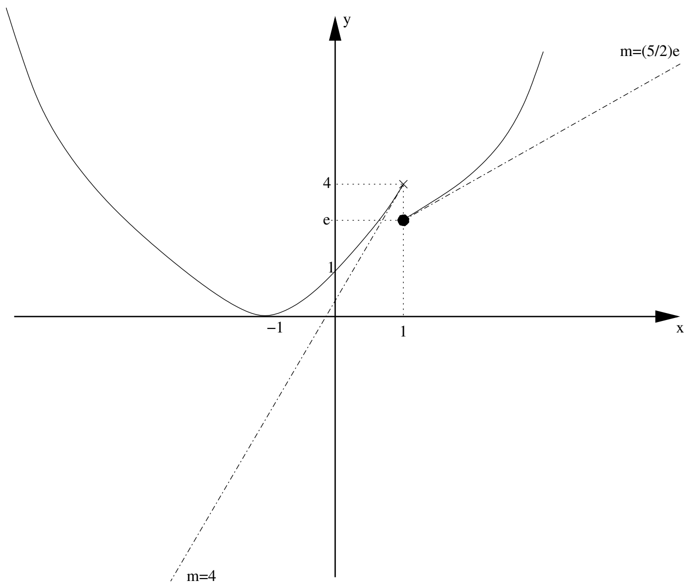


Figura 1: Grafico di $f$. Notare che fino a 1 il grafico è quello di una parabola con vertice in $(-1,0)$ e concavità verso l'alto.

**Studio di grafico di funzione:**

Data $f(x)$ tramite il grafico in figura 2, determinare: (a) campo d'esistenza e suoi punti di accumulazione; (b) zeri; (c) intersezioni con gli assi; (d) segno; (e) punti di discontinuità; (f) limiti; (g) asintoti; (h) punti critici; (i) monotonia; (j) estremi locali e globali; (k) tangenti destra e sinistra in 0; (l) punti di non derivabilità.

**Svolgimento:**

(a) $\text{CE} = [-4,2] = \text{CE}'$.

(b) Gli zeri sono le ascisse delle intersezioni con l'asse $x$, cioé $\{-4,1\}$.

(c) Intersezioni con l'asse $x$: $(-4,0)$, $(1,0)$. Intersezioni con l'asse $y$: $(0,2)$.

(d) Il segno è positivo in $(-4,1)$, negativo in $(1,2]$.

(e) Le discontinuità vanno cercate nel campo di esistenza della funzione, e graficamente corrispondono a "salti" nel grafico. Nel nostro caso, la funzione non mostra alcun salto.

(f) I limiti non banali sono quelli in $(\text{CE}' - \text{CE}) = \emptyset$.

(g) Non ci sono asintoti.

(h) I punti critici sono i punti in cui la tangente è orizzontale (cioé i punti in cui la derivata è zero): $(-3,4)$ e $(-1,1)$.

(i) La funzione è monotona crescente in $(-4,-3) \cup (-1,0)$, monotona decrescente in $(-3,-1) \cup (0,2)$.

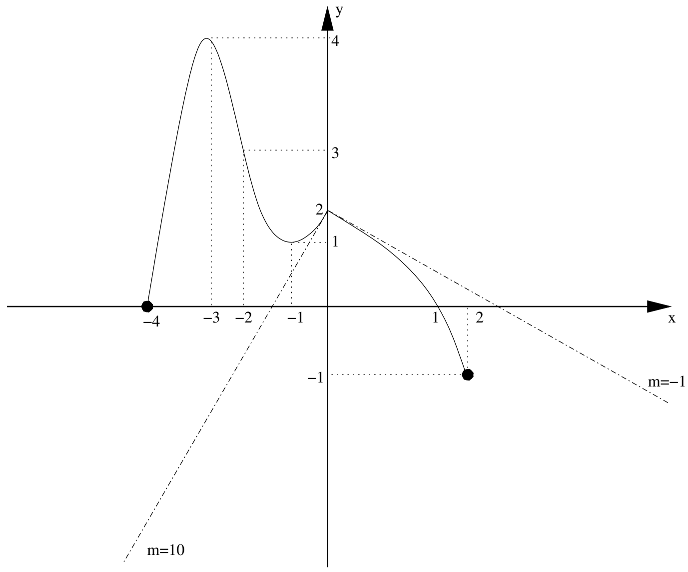


Figura 2: Da questo grafico, dedurre proprietà della funzione.

(j) Massimo globale: $(-3,4)$. Minimo globale: $(2,-1)$. Massimi locali: $(-3,4)$ e $(0,2)$. Minimi locali: $(-4,0)$, $(-1,1)$ e $(2,-1)$.

(k) La tangente sinistra in 0 è $y-2=10x$, la tangente destra in 0 è $y-2=-x$.

(l) In $x=0$ le tangenti sinistra e destra sono diverse, dunque $f$ non è derivabile per $x=0$.

**Massimi e minimi:**
Determinare i minimi e i massimi (locali e globali) sull'intervallo $(2,103]$ della seguente funzione:

$$f(x) := \ln\sqrt{|x|}$$

**Svolgimento:**
Basta osservare che $f(x) = \ln\sqrt{|x|} = \frac{\ln x}{2}$ nell'intervallo $(2,103]$ e usare la conoscenza dei grafici elementari, per ottenere un massimo globale (e locale) in $(103, \frac{\ln 103}{2})$.

**Zeri:**
Stabilire se $f(x) := x^5 - 5x + 1$ ammette degli zeri sul suo campo d'esistenza. In caso affermativo, dire quanti sono gli zeri e stimarli tutti con precisione di almeno un'unità.

**Svolgimento:**
Studio sommario di $f$ sul suo campo d'esistenza, cioè $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$
$$f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4-1).$$

Il segno di $f'$ ci dice che $f$ è crescente in $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ e decrescente in $(-1,1)$. Dunque il grafico di $f$ è dato (a meno di derivata seconda, che non ci interessa) dalla figura 3. Dunque esistono esattamente tre zeri $x_1$, $x_2$ e $x_3$ con $x_1 \in (-2,-1)$, $x_2 \in (0,1)$ e $x_3 \in (1,2)$ (abbiamo calcolato $f(-2)=-21$, $f(-1)=5$, $f(0)=1$, $f(1)=-3$, $f(2)=23$).

**Punti fissi:**
Stabilire se la curva $f(x) := x^5 - 4x + 1$ possiede punti fissi nell'intervallo $(-1,1)$. In caso affermativo, dire quanti sono e stimarne le ascisse con precisione di almeno un'unità.

**Svolgimento:**
Il problema è equivalente a trovare gli zeri di $F(x) = x^5 - 5x + 1$ nell'intervallo $(-1,1)$, che è esattamente l'esercizio precedente ristretto all'intervallo $(-1,1)$. Dunque esiste un unico punto fisso $x_1 \in (0,1)$.

**Teorico:**
Scrivere una definizione comprensibile di funzione continua. Dire poi se è possibile utilizzare tale definizione per dimostrare che $\ln x$ è una funzione continua.

**Svolgimento:**
$f$ si dice continua in un punto $x_0$ del suo campo d'esistenza se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

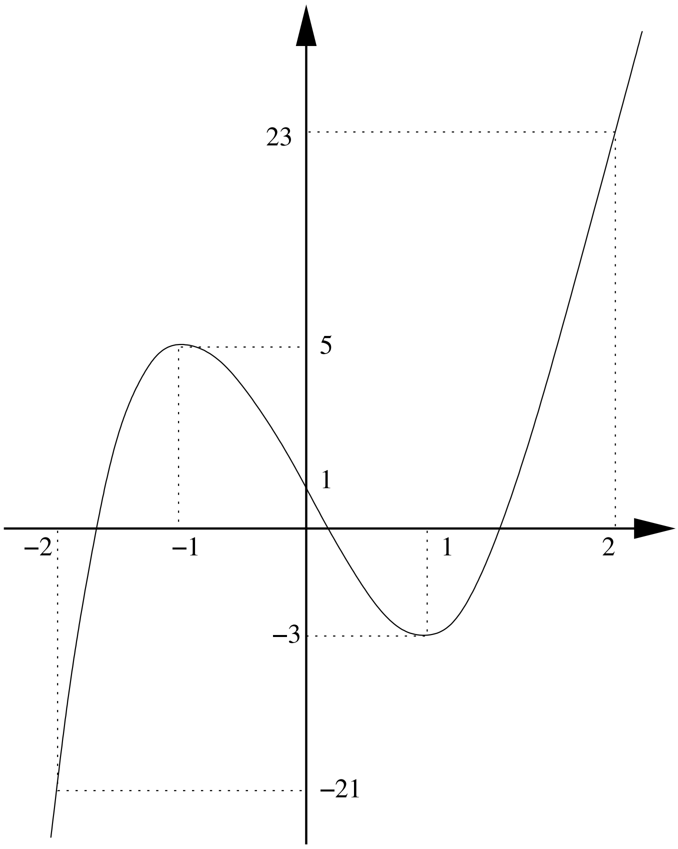


Figura 3: La funzione ha esattamente tre zeri.

$f$ si dice continua se è continua in ogni punto del suo campo di esistenza. Si può utilizzare questa definizione per mostrare che $\ln x$ è continua *solo* calcolando $\lim_{x\to x_0} \ln x$ con la definizione di limite, e non semplicemente dicendo $\lim_{x\to x_0} \ln x = \ln x_0$ (in quanto questo segue *esattamente* dal fatto che $\ln x$ è una funzione continua!).